第二节 复 变 函 数

一、复变函数的概念

- 1. 复变函数的定义
- 2. 映射的概念
- 3. 反函数或逆映射

1. 复变函数的定义 —与实变函数定义相类似

定义 设 D 是一个复数 $z=x+iy$ 的集合，∃法则 f

$s.t.\ \forall z\in D \quad z\xrightarrow{f} w=u+iv$，则称复变数 w 是复变数 z 的函数（简称复变函数）记作 $w=f(z)$

D：$f(z)$ 的定义集合，常常是平面区域（定义域）

$D^*=\{w \mid w=f(z)\ z\in D\}$：函数值集合

若构成区域，则称为值域。

若 $z\to$ 一个 w 值，称 $f(z)$ 是单值函数；

$z\to$ 多个 w 值，称 $f(z)$ 是多值函数

复变函数与实变函数的关系

例　复变函数　$w = z^3 - 1$

若令$z = x + iy$,则　$w = z^3 - 1 = (x+iy)^3 - 1$

$$= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i - 1$$

$$= (x^3 - 3xy^2 - 1) + (3x^2y - y^3)i \quad = u + vi$$

$$\therefore w = z^3 - 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - 1 & = u(x, y) \\ v = 3x^2y - 3y^3 & = v(x, y) \end{cases}$$

$w = z^3 - 1 \leftrightarrow$ 两个二元实函数。

可以借助于已经熟悉的实二元函数的性质和研究方法去探索复变函数的性质。

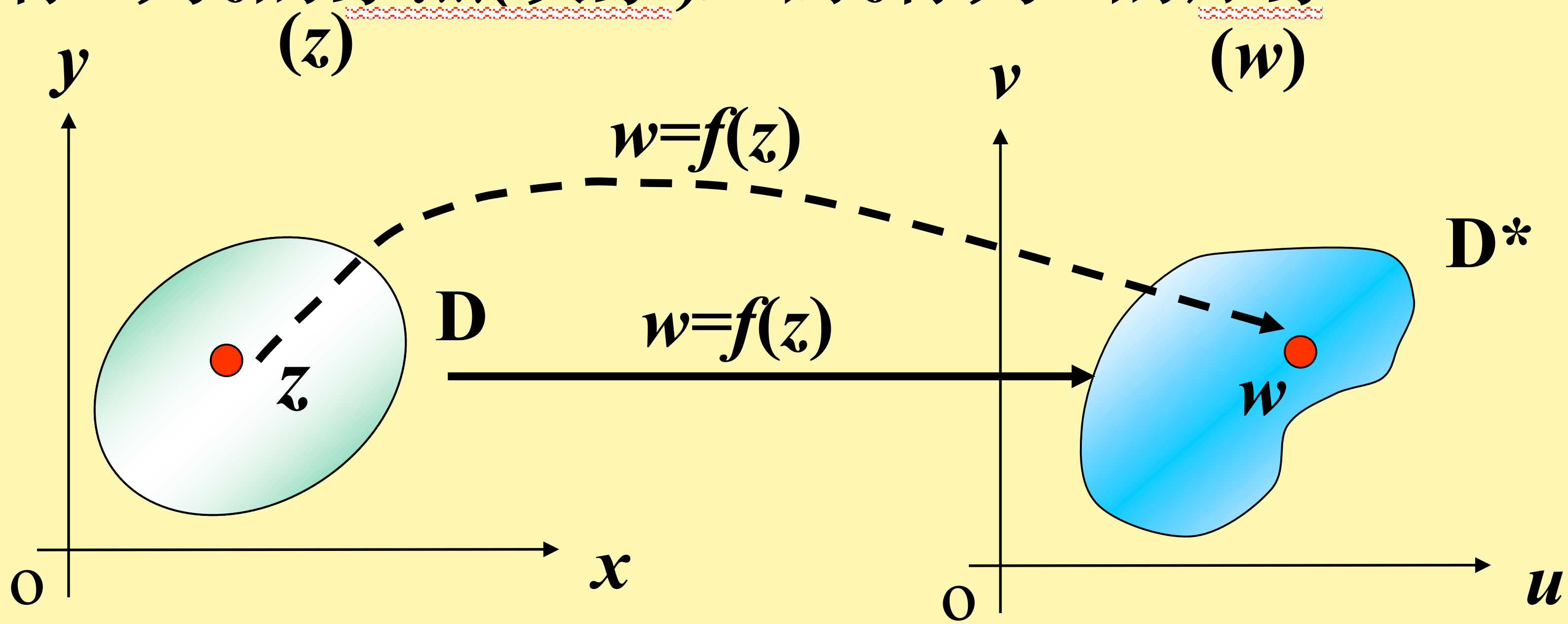
2. 映射的概念 ——复变函数的几何意义

在几何上， $w=f(z)$可以看作：

$z\in D$ (z平面) $\xrightarrow{w=f(z)}$ $w\in D^*$ (w平面)的映射(变换).

定义集合　　　　函数值集合

称w为z的象点(映象)，而z称为w的原象。



•复变函数的几何意义是一个映射（变换）

在复变函数中用两个复平面上点集之间的对应关系来表达两对变量 u，v 与 x，y 之间的对应关系，以便在研究和理解复变函数问题时，可借助于几何直观.

以下不再区分函数与映射（变换）。

3. 反函数或逆映射

例　设 $w=z^2$ 则称 $z=\sqrt{w}$ 为 $w=z^2$ 的反函数或逆映射

$$\because z=\sqrt{w}=\sqrt{|w|}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}\ (k=0,1)\quad \therefore \text{为多值函数,2支.}$$

定义　设 $w=f(z)$ 的定义集合为D，函数值集合为D^*

$$z\in D \xrightarrow{w=f(z)} w\in D^*$$

$$\text{一个(或几个)}z\in D \xleftarrow[z=\varphi(w)]{} w\in D^*$$

则称$z=)(w)$为$w=f(z)$的反函数（逆映射）.

二、 复变函数的极限与连续性

1. 函数的极限

定义 设 $w = f(z) \quad z \in U(z_0, \rho)$, 若∃复数$A, \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta, (0 < \delta \leq \rho)$ 当 $0 < |z - z_0| < \delta$时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$,

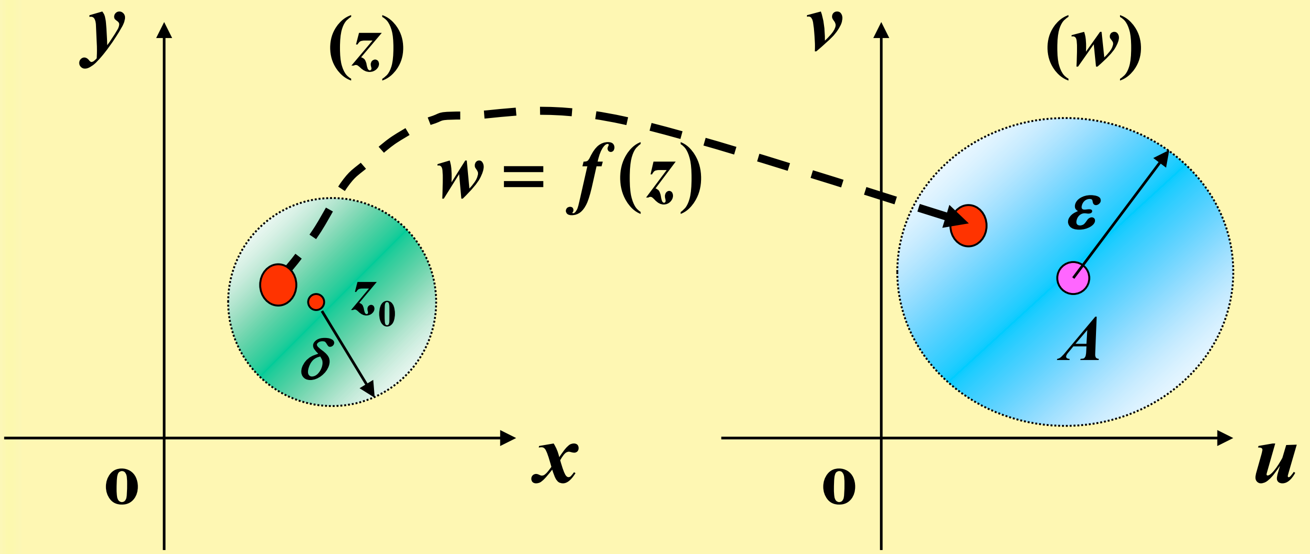
则称A为 $f(z)$当$z \to z_0$时的极限，记作$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$

或当$z \to z_0$时，$f(z) \to A$

定义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的， 与一元实变函数相比较要求更高.

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon>0,\exists\delta,\text{当}\,0<|z-z_0|<\delta\text{时},$$

$$\text{有}\,|f(z)-A|<\varepsilon$$



几何意义:

当变点z一旦进入z_0的充分小去心邻域时,它的象点$f(z)$就落入A的一个预先给定的ε邻域中

2. 运算性质

定理1 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0$,

复常数$A=u_0+iv_0$,那么$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$的充要

条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$

$$\lim_{z\to z_0} u(x,y)+iv(x,y)=u_0+iv_0$$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)+i\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$$

注： 可将复变函数求极限问题转化为二个实变函数的极限问题、

定理2 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \quad \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B \Rightarrow$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right] = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z)$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot \lim_{z\to z_0} g(z)$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} \qquad (\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0)$$

以上定理用极限定义证!

3. 函数的连续性

定义 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$在$z_0$处连续;若在区域$D$内处处连续，则称$f(z)$在$D$内连续;若$z$、$z_0\in C$，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$在曲线$C$上点$z_0$处连续.

定理3

设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在 $z_0=x_0+iy_0$处连续.

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+iv(x,y)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)$$

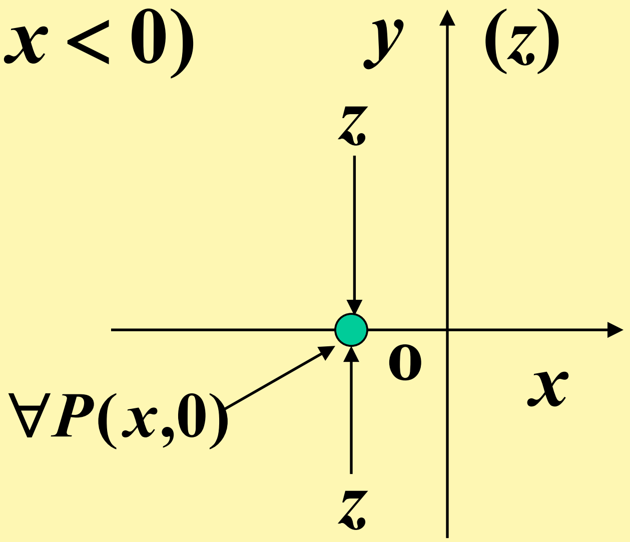
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v(x_0,y_0) \end{cases}$$

例2　证明$f(z)=\arg z$在原点及负实轴上不连续。

证明　(1) $\because f(z)=\arg z$在原点没有定义，

故不连续。

(2)在负实轴上，任取$P(x,0)(x<0)$



$$\because \lim_{y\to 0^+}\arg z=\pi$$

$$\lim_{y\to 0^-}\arg z=-\pi$$

$\therefore \arg z$在负实轴上不连续。

定理4 连续 函数的和、差、积、商、(分母不为0)

仍为连续函数;

连续函数的复合函数仍为连续函数。

由以上讨论$\Rightarrow$

$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$在整个复平面内是连续的;

有理分式$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面内除分母为0点外处处连续,

其中$Q(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m$.